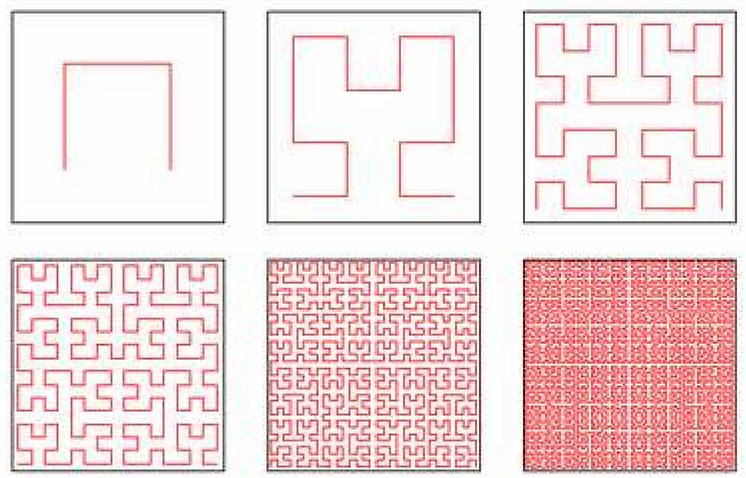
I frattali

In questa sezione cercheremo di approfondire lo studio sui fiocchi di neve avvalendoci della teoria dei frattali.
Per frattale si intende un oggetto geometrico che si ripete nella struttura allo stesso modo su scale diverse, ovvero non cambia aspetto anche se visto con una lente di ingrandimento e tale caratteristica prende il nome di auto similarità.
In sostanza questi strani oggetti sono caratterizzati da forme frastagliate, di consistenza granulare e particolarmente attorcigliate, proprio come le forme naturali; pensiamo a titolo di esempio ai rami di un albero, al percorso di un fiume o alla struttura delle galassie e non ultimo ai nostri fiocchi di neve e a tanti altri casi naturali.
Grazie all'uso dei frattali è possibile descrivere in termini matematici molti fenomeni naturali che da tempo furono esclusi.
Lo studio sui frattali ha origini antiche anche se il termine frattale fu coniato per la prima volta nel 1975 da Benoit Mandelbrot e deriva dal latino *fractus* che vuol dire spezzato, frazionato.
A partire dal XX secolo molti matematici approfondirono quella rivoluzione avvenuta in campo geometrico già nell'Ottocento che fece emergere nuove forme di geometrie ideando nuove strane curve come le curve di Peano – Hilbert che rappresentiamo di seguito, che è un esempio:



oppure il *merletto di Von Koch*, o il *tappeto di Sierpinsky* di cui parleremo più avanti.
Nello stesso secolo però l'esigenza di individuare un linguaggio adeguato per descrivere i fenomeni naturali andò via via sempre di più crescendo.
L'intervento di Mandelbrot fu determinante. Egli infatti riuscì a dimostrare ai suoi colleghi matematici che le loro strane raffigurazioni potevano essere sfruttate con lo scopo di analizzare la complessità che si può riscontrare in natura.
Negli ultimi vent'anni si sono realizzati dei passi da gigante e i frattali sono stati adoperati per realizzare molteplici modelli matematici in vari settori che vanno dalle scienze naturali alle scienze economiche.

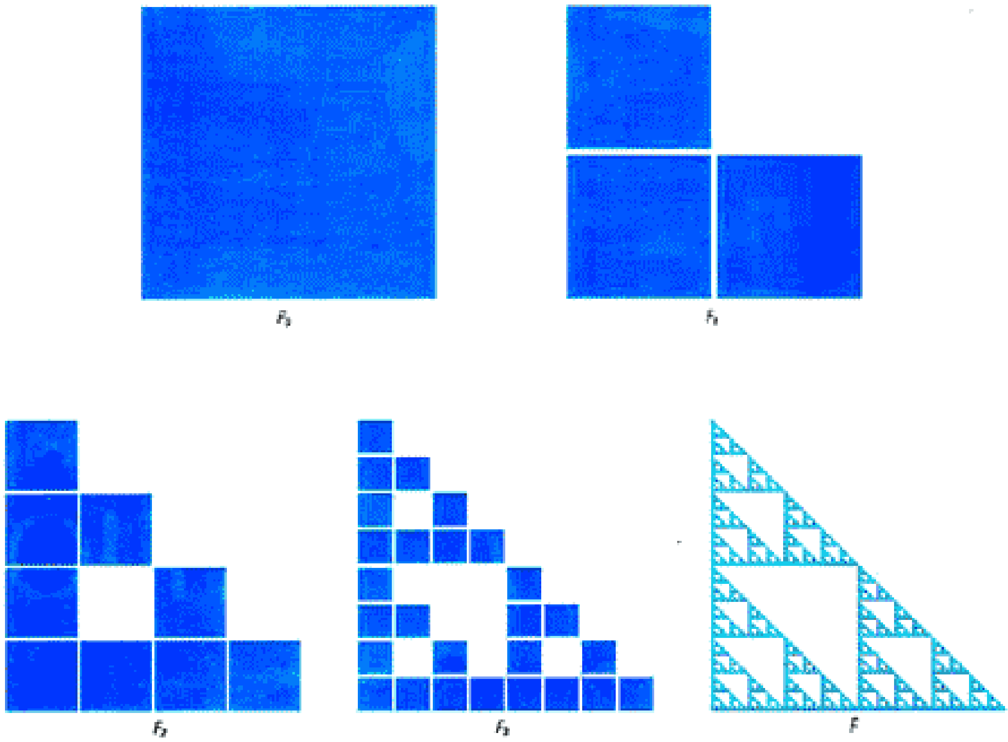
L’uso dei frattali è strettamente collegato allo studio di fenomeni caotici, in particolare alla teoria del caos e questi oggetti compaiono sotto forma di equazioni molto semplici come ad esempio l’equazione:

$$a_{n+1} = a_n^2 + P_o$$

che rappresenta l’insieme di Mandelbrot dove a_n e P_0 sono dei numeri complessi.

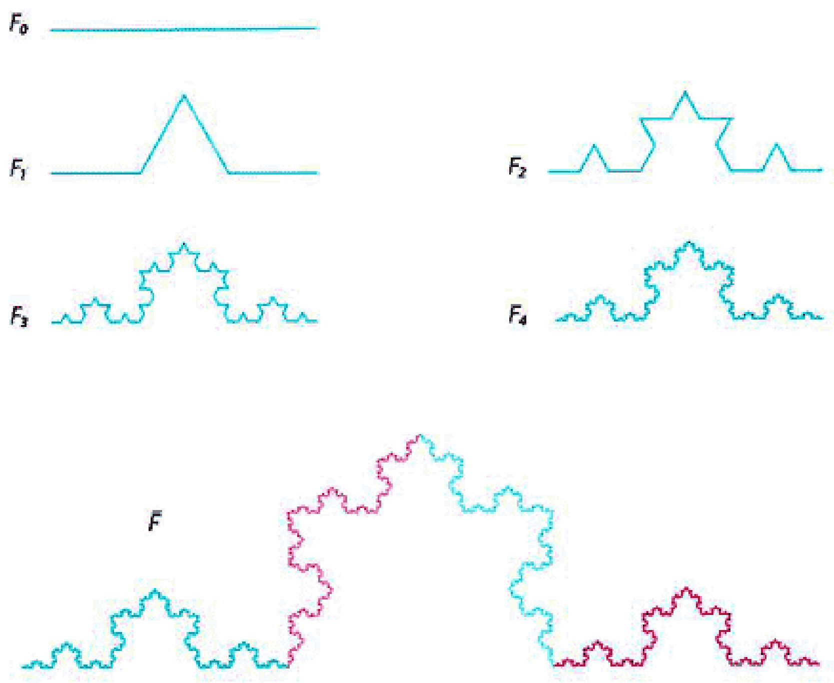
Con l’ausilio dei computer è possibile realizzare interessanti rappresentazioni dei frattali che sono entrate poi a far parte di una nicchia del mondo artistico.

Diamo ora un classico esempio di una figura frattale chiamata *gerla* o *tappeto di Sierpinsky*:

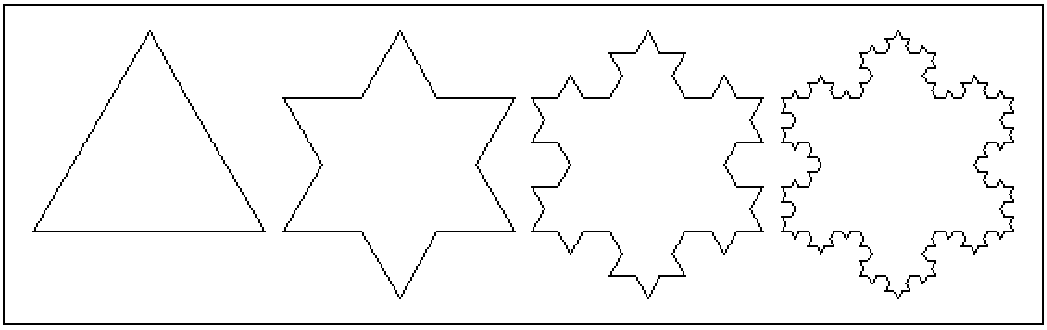


Il tappeto di *Sierpinsky* si genera attraverso una serie di rimozioni. Partendo infatti dal quadrato iniziale F_0 si sottrae un quadratino di lato pari alla metà del precedente ottenendo così la figura F_1 composta da tre quadrati. Successivamente ad ognuno di questi quadrati gli si toglie un quadratino di lato uguale alla metà dei precedenti, pervenendo così alla figura F_2 costituita da 9 quadrati. Iterando la tecnica si arriva così a costruire la figura finale *F* che rappresenta il tappeto di *Sierpinsky*.

Un altro esempio accattivante sui frattali ci è dato dal *merletto di Von Koch* realizzato nel 1904 di cui riportiamo la figura:



La tecnica che verrà iterata al fine di realizzare la figura F è la seguente: si parte dal segmento F_0 lo si divide in tre parti e si sostituisce al segmento centrale i due segmenti della sua stessa lunghezza che costituiscono due lati di un triangolo equilatero ottenendo così la figura F_1. Le figure successive si ottengono iterando il procedimento.
Applicando lo stesso ragionamento ai lati di un qualsiasi triangolo otterremo il seguente disegno:



L'ultima figura a destra rappresenta il così detto *fiocco di neve di Van Koch.* Osserviamo ancora una volta come l'uso dei frattali riesca a rappresentare fenomeni naturali come lo possono essere i fiocchi di neve.
Ogni frattale ha una propria dimensione che viene espressa tramite il valore:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{\rho}}$$

essendo N il numero di parti simili alla figura intera e ρ il rapporto di omotetia. La formula data può essere così spiegata:

supponiamo di trovarci in dimensione 1 e di dividere un segmento in $N = K$ segmentini (simili al segmento intero).
Nel caso bidimensionale divideremo un quadrato in $N = K^2$ quadratini (simili al quadrato intero) per cui $K = \sqrt{N}$ mentre nello spazio un cubo lo divideremo in $N = K^3$ cubetti (simili al cubo intero). K quindi sarà pari a $\sqrt[3]{N}$.
Infine in dimensione D scomporremo un ipercubo in $N = K^D$ *ipercubetti* (simili all'ipercubo intero) avendo $K = \sqrt[D]{N}$.
Il rapporto di omotetia è sempre costante per cui

$$\rho = \frac{1}{K} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{\sqrt[D]{N}}$$

Ricaviamo D, prendendo i logaritmi di entrambi i membri dell'ultima equazione

$$\log\frac{1}{K} = \log\frac{1}{\sqrt[D]{N}} = -\log\sqrt[D]{N} = -\frac{1}{D}\log N$$

$$D = -\frac{\log N}{\log\frac{1}{K}} = \frac{\log N}{\log K} = \frac{\log N}{\log\frac{1}{\rho}}$$

Nel caso del merletto di Von Koch quale sarà la sua dimensione?
Abbiamo diviso il segmento iniziale in 3 parti e costruito la linea spezzata composta da quattro segmenti di ugual lunghezza pari a un terzo della lunghezza iniziale; poi abbiamo iterato il procedimento su ciascuno dei 4 segmenti. Dunque il rapporto di omotetia è $\rho = \frac{1}{3}$. Mentre il numero N di parti simili è 4.
Per cui

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618..$$